Résumé 08 : Convergence dominée

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ sera le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_I f_n(x)dx = \int_I \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx$

§ 1. ***Paramètre discret.–*** Tout ce chapitre repose sur le théorème suivant, dont la preuve ne figure pas au programme :

Théorème I.1 (*Convergence dominée*)

Soit I un intervalle. Si

- *$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de I dans $\mathbb{C}$ continues par morceaux.*
- *$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction f.*
- *il existe une fonction $\varphi \in \mathscr{C}^0_m(I,\mathbb{R})$ intégrable sur I telle que pour tout $n\in\mathbb{N}, |f_n| \leqslant \varphi$,*

alors $\displaystyle\int_I f_n(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f(t)\mathrm{d}t.$

Remarques :

1. L'hypothèse de domination est indispensable :

$$n^2te^{-nt} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \text{ mais } \int_0^{+\infty} n^2te^{-nt}dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

2. φ doit être à la fois intégrable et indépendante de n. La difficulté est souvent de parvenir à déterminer cette fonction φ. $\varphi(t) = \sup_{n\in\mathbb{N}}|f_n(t)|$ est un bon candidat, mais on peut avoir des difficultés à en trouver une expression, et donc à déterminer sa régularité et son intégrabilité. Voyons quelques cas :
   - Si pour tout $n, 0 \leqslant f_n \leqslant f_{n+1}$, on pourra prendre $\varphi = f$, car alors $f = \sup_n f_n$.
   - De la même manière, si $0 \leqslant f_{n+1} \leqslant f_n$, on pourra prendre $\varphi = f_1$.
   - On pourra enfin essayer de fixer t et d'étudier la fonction $x \longmapsto f_x(t)$ pour déterminer sa borne supérieure.

§ 2. ***Paramètre continu.–*** On peut décliner un version non discrète de ce théorème, i.e pour les fonctions définies par une intégrale de type $x \longmapsto \displaystyle\int_I f(x,t)dt$. Vous devez vous convaincre que c'est exactement le même que le précédent, afin qu'il ne nécessite aucun effort supplémentaire de votre part pour le retenir :

Théorème I.2 (*Convergence dominée pour $\int_I f(x,t)dt$*)

Soient I et J deux intervalles, $x_0 \in \bar{I}$, et $f : (x,t) \in J\times I \longmapsto f(x,t) \in \mathbb{C}$. Si

- *pour tout $x\in J, f_x : t\in I \longmapsto f(x,t)$ est continue par morceaux.*
- *pour tout $t \in I$, $\quad f(x,t) \xrightarrow[x\to x_0]{} f(t)$.*
- *il existe une fonction $\varphi \in \mathscr{C}^0_m(I,\mathbb{R})$ intégrable sur I telle que pour tout $x\in J, |f_x| \leqslant \varphi$,*

alors $\displaystyle\int_I f(x,t)\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to x_0]{} \int_I f(t)\mathrm{d}t.$

II $\displaystyle\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n(t)\mathrm{d}t.$

§ 1. ***théorème d'interversion $\mathscr{L}^1$.–*** A ce stade de l'année, nous n'utiliserons que les deux développements en séries de fonctions suivants :

- Pour tout complexe $z, e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}$.
- Pour tout complexe z de module <1, $\displaystyle\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$.

Nous allons ici particulariser la question de la section précédente au cas où les S_n sont des sommes partielles de séries de fonctions, i.e où $S_n = \sum_{k=0}^n f_k$. Dans ce cas, le limite simple de S_n s'écrit $f = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} f_k$ et $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\int_I f_k$ est une série numérique. On cherche ainsi des hypothèses qui permettent d'intervertir les symboles $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}$ et $\displaystyle\int_I$.

Théorème II.1 (*interversion $\mathscr{L}^1$*)

Soit I un intervalle. SI
- *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux et intégrable sur I,*
- *$\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I ,*
- *la série numérique $\sum_{n\geqslant 0}\int_I |f_n(t)|\mathrm{d}t$ converge,*

alors f est intégrable sur I, et $\boxed{\displaystyle\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n(t)\mathrm{d}t.}$

§ 2. ***Et si $\sum_{n\geqslant 0}\int_I |f_n|$ diverge.–*** Le théorème II.1, d'application aisée, contient une hypothèse forte (la troisième) : il est muet par exemple sur une intégrale comme $\displaystyle\int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{t+n}dt$ car $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\int_0^1\left|\frac{(-1)^n}{t+n}\right|\mathrm{d}t$ diverge. On peut dans ce cas essayer de travailler avec les sommes partielles et montrer que l'intégrale du reste tend vers 0, soit à la main, soit avec le théorème de convergence dominée : puisque pour tout $t \in I$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) = \sum_{n=0}^{N} u_n(t) + R_N(t)$, l'additivité de l'intégrale permet d'écrire

$$\int_I\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\right)dt = \sum_{n=0}^{N}\int_I u_n(t)dt + \int_I R_N(t)dt.$$

Etablir que $\displaystyle\int_I R_n(t)dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ assurera d'une part la convergence de la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_I u_n(t)dt$, et d'autre part l'égalité $\displaystyle\int_I\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\right)dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_I u_n(t)dt.$

On est donc ici ramenés à la première section de ce résumé, i.e établir la limite d'une suite d'intégrales de fonctions.

Remarques :

La difficulté provient à nouveau de la majoration, car elle nécessite une expression des sommes partielles (ou des restes partiels), et nous l'avons rarement, si ce n'est lorsque la série est géométrique ou de Leibniz. C'est le cas dans l'exemple précédent, où la série étant de Leibniz, $|R_n(t)| \leqslant \frac{1}{n+1+t} \leqslant 1$ qui est intégrable sur $[0,1]$.

ANNEXE

A Quelques figures imposées

Exercices :

Prouver l'égalité $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos t}{e^t+1}dt = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+1}}$.

Exercices :

Prouver l'égalité $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{e^t-1}dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+1}$.

Exercices :

CCP Analyse 25

1. Démontrer que, pour tout entier n, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.
2. On pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^n e^{-t}}$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.